第８講　運動量と力積

1

次の文章の空欄にあてはまる数式または数値を答えなさい。

台車に乗った太郎くんがボールのやりとりをする。やりとり後に太郎くんと台車はどのような運動をするのか，A，B，Cの３通りを考えてみよう。台車と太郎くんはどの場合においても，初めは共に静止しているとする。台車と太郎くんは一体と考えてよく，台車と太郎くんの質量の総和を M とする。ボールは大きさの無視できる質量 m の物体として取り扱う。また，台車と地面の間の摩擦は無視し，水平右向きを力，速度，および変位の正の向きとする。

A．左から速度 v $(v>0)$ で水平に向かってきたボールが，同じ姿勢を保ったままの太郎くんの頭に当たって跳ね返り，水平逆向き（左向き）に飛んでいった場合を考えよう（図１）。太郎くんとボールとの衝突は弾性衝突とみなす。衝突後にボールの速度は $-v'$ $(v'>0)$ となり，台車の速度は V' $(V'>0)$ になったとする。反発係数（はねかえり係数）は v，v'，V' を用いて［ (1) ］と表すことができ，衝突が弾性衝突であることから，この数値は［ (2) ］となっているはずである。また運動量保存の法則により，m，v，v'，M，V' の関係式を［ (3) ］と書くことができる。よって衝突後の台車の速度 V' は，m，v，M を用いて［ (4) ］と表される。この衝突では力学的エネルギーが保存されている。

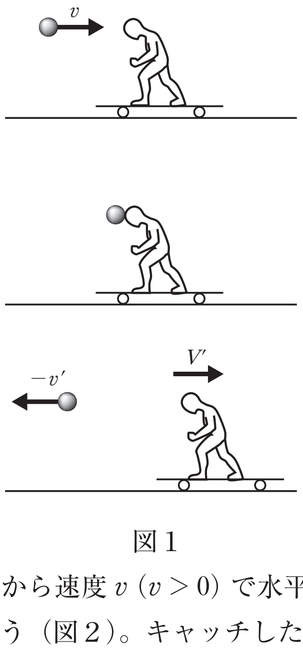

図１

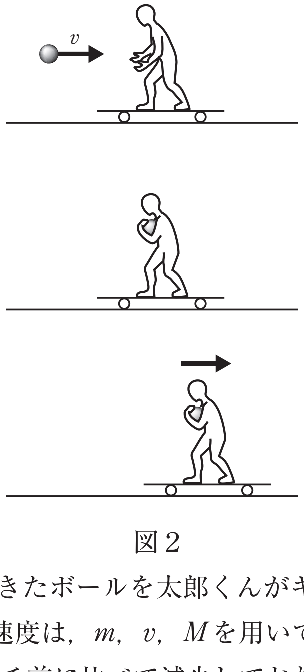

図２

B．次に，左から速度 v $(v>0)$ で水平に向かってきたボールを太郎くんがキャッチした場合を考えよう（図２）。キャッチした後の台車の速度は，m，v，M を用いて［ (5) ］と表される。このとき力学的エネルギーの総和はキャッチ前に比べて減少しており，その減少量は m，v，M を用いて［ (6) ］と表される。この減少したエネルギーは熱や変形，音などのエネルギーに変わっていると考えられる。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

C．最後に，太郎くんが水平左向きにボールを投げた場合を考えよう（図３）。投球後，地上で静止している人から見てボールは速度 $-v\,(v>0)$ で運動した。太郎くんはボールを構えてから手放すまでの短い時間 Δt の間に，ボールに一定の力を水平左向きに加えていたと考えよう。この力を $-F\,(F>0)$ とすると，力積 $-F\Delta t$ は，m，v を用いて ⑺ と書ける。太郎くんがボールに力を加えているとき，太郎くんもまたボールから右向きの力を受けている。この力を $F'\,(F'>0)$ とすると，F と F' との関係は ⑻ と表される。投球後の台車の速度を $V''\,(V''>0)$ とすると，太郎くんと台車がボールから受ける力積 $F'\Delta t$ は，M，V'' を用いて ⑼ と書ける。⑺，⑻，⑼より，投球前後で運動量が保存されていることがわかる。このことを用いると投球後の台車の速度 V'' は，m，v，M を用いて ⑽ と表される。一方，投球後の力学的エネルギーの総和を求めてみると，投球前の値に比べて増えていることがわかる。この増加分を m，v，M を用いて表すと ⑾ となる。この場合投球は，ともに静止していた質量 m と M の物体の「分裂」と考えられる。上の考察によって，分裂を起こすためには，力学的エネルギーを増やす必要があることが示された。この力学的エネルギーに追加された分は，太郎くんの体内のエネルギーが変換されたものである。体内のエネルギーまでを考慮に入れると，エネルギー全体は保存されているはずである。

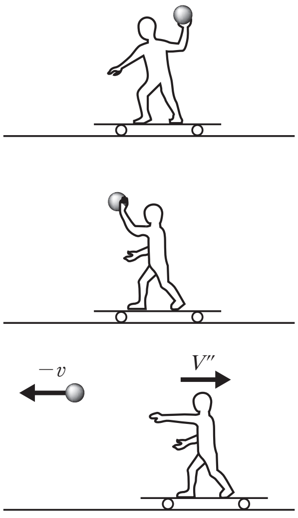

図３

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

なめらかな水平面に質量 m の小球Aを質量を無視できるばねに押し付けて a だけ縮めて静かに放すと，小球Aはばねが自然長になったところでばねから離れた。そのときの速度 v_0 を保ったまま小球Aは静止している質量 M の小球Bに衝突し，衝突後，小球Aおよび小球Bの速度はそれぞれ右向きを正として v_A，v_B となった。ばね定数を k とする。次の文の□にあてはまる答えを解答群の中から記号で選びなさい。

(1) 小球Aがばねから離れたときの速度 v_0 は ① である。

(2) 衝突前と衝突後の小球Aおよび小球Bに関する運動量保存則の式は ② となる。

(3) この衝突のはねかえり係数を e とすると，衝突後の速度はそれぞれ，

$v_A =$ ③ ，$v_B =$ ④ となる。

(4) 完全非弾性衝突（$e = 0$）のとき，失われた力学的エネルギー ΔE は，

$\Delta E =$ ⑤ となる。

解答群

(ア) $\sqrt{\dfrac{m}{k}}a$　　(イ) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}a$

(ウ) $\sqrt{\dfrac{ma}{k}}$　　(エ) $mv_0 = mv_A + Mv_B$

(オ) $\dfrac{1}{2}mv_0{}^2 = \dfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \dfrac{1}{2}Mv_B{}^2$　　(カ) $mv_0{}^2 = mv_A{}^2 + Mv_B{}^2$

(キ) $\sqrt{\dfrac{m-eM}{m+M}}v_0$　　(ク) $\dfrac{m-eM}{m+M}v_0$

(ケ) $\dfrac{m+eM}{m+M}v_0$　　(コ) $\dfrac{(1+e)m}{m+M}v_0$

(サ) $\sqrt{\dfrac{(1-e)m}{m+M}}v_0$　　(シ) $\dfrac{e(m-M)}{m+M}v_0$

(ス) $\dfrac{mMv_0{}^2}{2(m+M)}$　　(セ) $\dfrac{mMv_0{}^2}{m+M}$

(ソ) $\dfrac{2mMv_0{}^2}{m+M}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

地上 h の高さから質量 m の物体を静かに落とした。地面と物体との間のはねかえり係数を e，重力加速度を g としてつぎの(1)から(3)に答えよ。ただし，空気の抵抗は無視できるものとする。

(1)　n 回目に地面と衝突した後，物体は地上どれだけの高さまで上るか。

a．$\dfrac{1}{2}e^{2n-1}h$　　b．$e^{2n-1}h$　　c．$e^{2n}h$

d．$\dfrac{1}{2}e^{2n}h$　　e．$e^{2n+1}h$

(2)　地上に完全に静止するまでに物体が運動した全走行距離はいくらか。

a．$\dfrac{1}{5}\dfrac{1+e^2}{1-e^2}h$　　b．$\dfrac{1}{4}\dfrac{1+e^2}{1-e^2}h$　　c．$\dfrac{1}{3}\dfrac{1+e^2}{1-e^2}h$

d．$\dfrac{1}{2}\dfrac{1+e^2}{1-e^2}h$　　e．$\dfrac{1+e^2}{1-e^2}h$

(3)　物体が地面と n 回目に衝突したときに失う力学的エネルギーはいくらか。

a．$mghe^{2(n-1)}(1-e^2)$　　b．$\dfrac{1}{2}mghe^{2(n-1)}(1-e^2)$

c．$\dfrac{1}{3}mghe^{2(n-1)}(1-e^2)$　　d．$\dfrac{1}{4}mghe^{2(n-1)}(1-e^2)$

e．$\dfrac{1}{5}mghe^{2(n-1)}(1-e^2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　確認テスト

次の問の答えとして最も適切なものを，それぞれの解答群から一つずつ選びなさい。

図１のように，糸の一端を天井に固定し，他端に糸の長さと比べると直径が無視できる質量 m の小球をつける。糸をたるませないようにして，小球を最下点から高さ h_1 の位置まで移動させてから一旦停止させ，そのあと静かに放したところ，小球は最下点で床に固定された物体に正面衝突し，その後，小球は最下点から高さ h_2 の位置まではね返った。ただし，小球の運動は同一の鉛直面内でのみ生じるとし，$0 < h_2 < h_1$ であり，糸の質量と空気の抵抗は無視できるとする。また，重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えなさい。

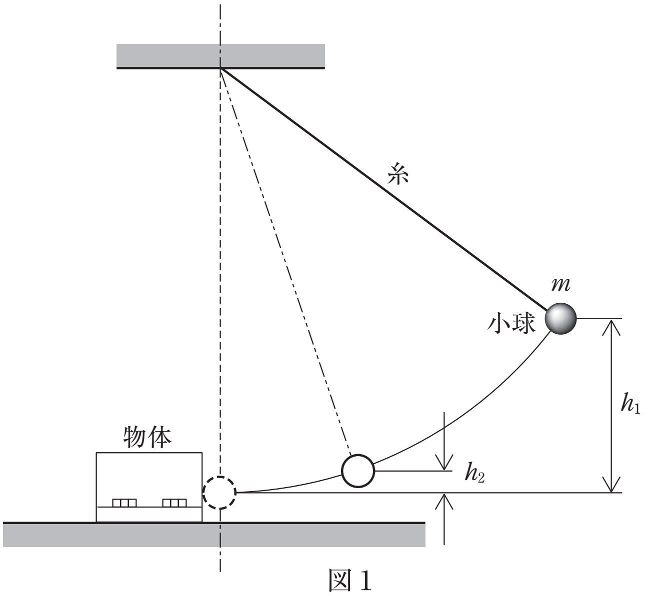

図１

(1)　衝突する直前の小球の速さを，g と h_1 を用いて表しなさい。

①　$\sqrt{gh_1}$　　②　$\sqrt{2gh_1}$　　③　$\sqrt{3gh_1}$　　④　$\sqrt{\dfrac{gh_1}{2}}$

⑤　$\sqrt{\dfrac{gh_1}{3}}$　　⑥　$\sqrt{\dfrac{2gh_1}{3}}$

(2)　小球と物体の間の反発係数（はね返り係数）を，h_1 と h_2 を用いて表しなさい。

①　$\sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}}$　　②　$\sqrt{\dfrac{h_1}{h_2}}$　　③　$\sqrt{\dfrac{h_1}{h_1-h_2}}$　　④　$\sqrt{\dfrac{h_1-h_2}{h_1}}$

⑤　$\sqrt{\dfrac{h_2}{h_1-h_2}}$　　⑥　$\sqrt{\dfrac{h_1-h_2}{h_2}}$

(3)　衝突中に小球が物体から受けた力積の大きさを，m，g，h_1，h_2 を用いて表しなさい。

①　$m\sqrt{2g(h_1-h_2)}$　　②　$m\sqrt{2g(h_1+h_2)}$

③　$m(\sqrt{2gh_1}-\sqrt{2gh_2})$　　④　$m(\sqrt{2gh_1}+\sqrt{2gh_2})$

⑤　$m(\sqrt{gh_1}-\sqrt{gh_2})$　　⑥　$m(\sqrt{gh_1}+\sqrt{gh_2})$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

次に，物体（質量 M）が床の上を移動できるようにする。図２のように，小球（質量 m）を最下点から高さ h_1 の位置まで移動させてから一旦停止させ，そのあと静かに放したところ，小球は最下点で静止している物体と正面衝突し，物体は床の上を移動した。小球と物体の間の反発係数（はね返り係数）は e であり，$m > eM$ である。ただし，小球と物体の運動は同一の鉛直面内でのみ生じるとし，床は水平でなめらかであるとして，以下の問に答えなさい。

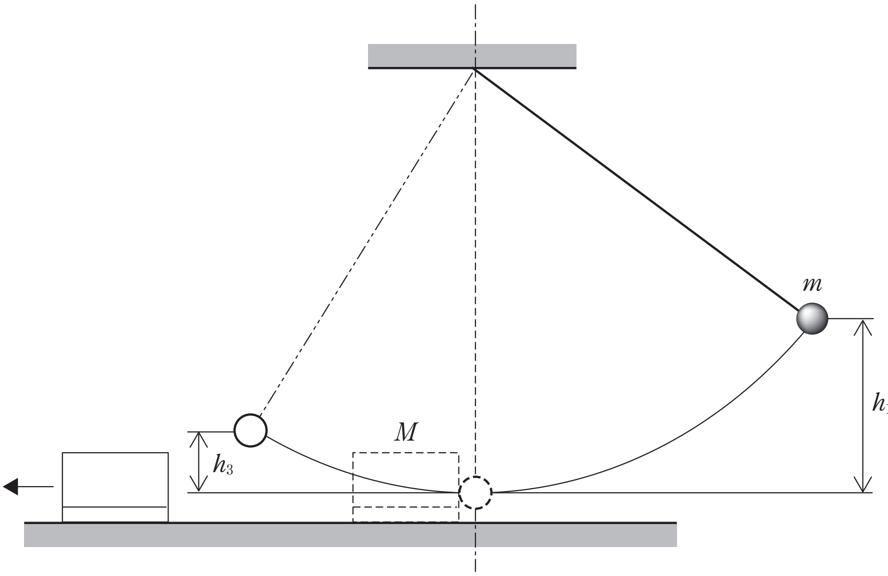

図２

⑷　衝突した直後の小球の速さを，m，M，e，g，h_1 を用いて表しなさい。

① $\dfrac{M}{m-eM}\sqrt{2gh_1}$　② $\dfrac{m-eM}{M}\sqrt{2gh_1}$

③ $\dfrac{m}{m-eM}\sqrt{2gh_1}$　④ $\dfrac{m-eM}{m}\sqrt{2gh_1}$

⑤ $\dfrac{M+m}{m-eM}\sqrt{2gh_1}$　⑥ $\dfrac{m-eM}{M+m}\sqrt{2gh_1}$

⑸　衝突のあと小球は最下点より高さ h_3 の位置まで上昇した。h_3 を，m，M，e，h_1 を用いて表しなさい。

① $\left(\dfrac{m-eM}{M}\right)^2 h_1$　② $\left(\dfrac{M}{m-eM}\right)^2 h_1$

③ $\left(\dfrac{m-eM}{M+m}\right)^2 h_1$　④ $\left(\dfrac{M+m}{m-eM}\right)^2 h_1$

⑤ $\left(\dfrac{m-eM}{m}\right)^2 h_1$　⑥ $\left(\dfrac{m}{m-eM}\right)^2 h_1$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　解答

1

A

（1）　$\dfrac{V'+v'}{v}$　　（2）　1　　（3）　$mv=MV'-mv'$　　（4）　$\dfrac{2m}{M+m}v$

B

（5）　$\dfrac{m}{M+m}v$　　（6）　$\dfrac{1}{2}\dfrac{Mm}{M+m}v^2$

C

（7）　$-mv$　　（8）　$F=F'$　　（9）　MV''　　（10）　$\dfrac{m}{M}v$

（11）　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Mm+m^2}{M}\right)v^2$

2

①　イ　　②　エ　　③　ク　　④　コ　　⑤　ス

3

（1）　c　　（2）　e　　（3）　a

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　確認テスト

【解答】

(1)　②　　(2)　①　　(3)　④　　(4)　⑥　　(5)　③

【解説】

(1)　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \quad \text{——①} \qquad \therefore \quad v_1 = \boldsymbol{\sqrt{2gh_1}}$$

(2)　衝突後の速さを v_2 として，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 \quad \text{——②}$$

②÷①より，

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1} \qquad \therefore \quad e = \frac{v_2}{v_1} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}$$

(3)　運動量と力積の関係から，求めるべき力積を I として，

$$mv_1 + I = m(-v_2) \qquad \therefore \quad |I| = m|-v_2 - v_1| = \boldsymbol{m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)}$$

(4)　衝突した直後の小球の速度を v，物体の速度を V（ともに図の左向きを正）として運動量保存則とはね返り係数の式は

$$mv_1 = mv + MV \quad \text{——③} \qquad -e(v_1 - 0) = v - V \quad \text{——④}$$

③＋④×M より，

$$v = \frac{m-eM}{m+M}v_1 = \boldsymbol{\frac{m-eM}{m+M}\sqrt{2gh_1}}$$

(5)　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_3$$

$$\therefore \quad h_3 = \frac{v^2}{2g} = \boldsymbol{\left(\frac{m-eM}{m+M}\right)^2 h_1}$$